**Chapitre 5 – Séries entières**

**Définition**

Soit

Définition : On appelle série entière (S.E) définie par la suite complexe la série de fonctions où ,

Par abus de notation, on note cette série de fonction

L’ensemble des par lesquels la série numérique CV est appelé le domaine de convergence de la S.E. et la fonction est appelé somme de la série entière

Exemple :

1. La SE a pour domaine = disque ouvert de centre 0 et de rayon 1

**Rayon de convergence**

Lemme d’Abel : Soit une suite de nombres complexes. Soit tel que la suite est bornée. Alors pour tout tel que , la série numérique converge absolument.

Démonstration : ⍟

* Si , tel que , donc la propriété est vérifiée.
* Si soit tel que . Comme la suite est bornée,

Alors

Or la série géométrique CV, donc par comparaison de SATP, CV, donc la série numérique CVA

Définition : on appelle rayon de convergence (RCV) de la série entière l’élément :

Remarque : cet ensemble est non vide car pour la suite correspondante vaut la suite nulle.

Exemple :

Soit , si ,

Donc n’est pas bornée, donc

Propriété : De manière équivalent, on a aussi

Propriété : Soit une série entière de rayon de convergence . Soit

1. Si , la série numérique CVA
2. Si , la série numérique DVG

Démonstration : ⍟

1. Si , tel que . On suppose donc

Comme , n’est pas un majorant de

Donc il vérifiant

On peut alors appliquer le Lemme d’Abel (car est bornée, et donc la série CVA.

1. Si donc

C’est-à-dire que est non bornée, or

Donc est non bornée.

Alors la série DVG

Remarque : on utilise très souvent la contraposée du théorème précédent.

Remarque : si la série diverge mais pas grossièrement, alors

Remarque : si la série est semi-convergente, alors

Corollaire : Soit une SE de rayon de convergence .

* Si ,
* Si ,
* SI , , où

Définition : Soit une S.E. de rayon de convergence . Le disque est appelé disque ouvert de convergence de

**Détermination pratique du rayon de convergence**

Règle de d’Alembert

Soit une suite de nombres complexes tels que .

Si , alors le rayon de convergence de la S.E. vérifie , avec les conventions et

Démonstration : ⍟

Soit , posons , alors

Et . De plus,

Ainsi par la règle d’Alembert appliquée à la série numérique  :

* Si , , donc la série numérique CV, donc CV(A)

Donc , ceci , donc

* Si , alors donc la série numérique DVG donc la série numérique DVG aussi.
* Donc tel que d’où en faisant tendre vers  :

D’où

Règle de Cauchy :

Soit une suite complexe. Si , alors le rayon de convergence de la S.E. vérifie , avec les conventions et .

Démonstration : ⍟

Soit , on étudie la nature de la série numérique .

et

* Si , alors , donc comme , par définition de la limite,

Et donc , donc ne tend pas vers 0.

Donc la série numérique DVG, donc

* Si , alors et

Donc par définition de la limite,

D’où par croissance de ,

Donc par comparaison de SATP, la série numérique CV,

D’où CVA, ceci tel que

Donc , donc par double inégalité,

Cas des séries lacunaires

Il se peut que l’on rencontre des séries de la forme ou

Ces deux séries peuvent s’interpréter comme les séries entières suivantes :

et resp.

Remarque : Très souvent, les règles de Cauchy et d’Alembert ne vont pas marcher. Dans ce cas, soit on revient à la définition du rayon de convergence, soit on étudie la nature de la série numérique pour obtenir des inégalités sur .

**Opérations sur les séries entières**

**Somme de 2 séries entières**

Définition : Soient et deux séries entières. On appelle série entière somme des séries entières et la série entière .

Propriété : Soient et deux séries entières de rayons de convergence respectifs et . Notons le rayon de convergence de leur série entière somme,

* , on a :

Si de plus , alors .

**Produit de deux séries entières**Définition : On appelle série entière produit de 2 séries entières et la série entière où :

Propriété : Soient et 2 séries entières de rayons de convergence respectifs et . Notons le rayon de convergence de leur série entière produit . Alors .

De plus, , on a

**Série entière dérivée**

Définition : On appelle série entière dérivée de la série entière la série entière :

Propriété : une série entière et sa série entière dérivée ont le même rayon de convergence.

**Convergence normale**

Théorème : Soit une série entière de rayon de convergence . La série entière converge normalement sur tout disque fermé de centre O et de rayon , .

Démonstration : ⍟

Soit tel que

Notons . Soit ,

Ainsi la fonction est bornée sur et puisque la borne supérieure d’un ensemble est le + petit majorant de cet ensemble,

Mais , donc la série numérique CVA. Ainsi par comparaison de SATP, la série CV, d’où CVN sur .

**Séries entières d’une variable réelle**

Notons le rayon de convergence de la série entière (avec )

Soit ,

* Si la série numérique CVA
* Si , la série numérique DVG
* Si ou , alors on ne peut rien dire.

L’ensemble vérifie :

Donc est un intervalle, qu’on appelle intervalle de convergence de .

**Continuité de la somme d’une série entière**

Théorème : Une série entière de rayon de convergence CVN donc CVU sur tout segment inclus dans .

Théorème : La somme d’une série entière d’une variable réelle et de rayon de convergence , est continue sur

**Intégration**

Théorème : Soient une série entière de rayon de convergence et un segment inclus dans . Alors :

Définition : On appelle série entière primitive de la série entière la série entière .

Corollaire : Soit une suite entière de rayon de convergence . Sa série entière primitive a aussi pour rayon de convergence . De plus la somme de cette série entière primitive est l’unique primitive sur qui s’annule en 0 de la fonction somme de la série entière , ie :

Démo : Soit

La série entière dérivée de la série entière est la série entière et le 2 ont le même rayon de convergence (thm précédent).

* Si , alors le segment est inclus dans donc on peut utiliser le théorème précédent pour intégrer terme à terme :
* Si , idem sur le segment
* Si et

**Dérivation**

Théorème : Soit une série entière à variable réelle, de rayon de convergence .

Sa somme est de classe sur et ,

Démonstration : notons

* est de classe sur et
* CVS sur
* CVN sur tout segment inclus, donc sa somme est sur et l’égalité proposée est vérifiée.

Corollaire : Soit une série entière d’une variable réelle de rayon de convergence . Alors sa fonction somme est de classe sur et ses dérivées

successives s’obtiennent par dérivations terme à terme successives :

**Calcul des coefficients d’une série entière**

Théorème : Soit une série entière d’une variable réelle de rayon de convergence et de fonction somme Alors

Démonstration : On a vu que est de classe sur et ,

(on prend pour convention )

Corollaire : (Identification de 2 séries entières)

Soient et deux séries entières à variable réelle, de rayons de convergence respectifs et . On suppose qu’il existe tel que ,

Alors .

Démonstration : On note et la fonction somme des séries entières concernées

Par hyp, , alors , donc et sont de classe sur et en dérivant l’égalité proposée, on a

Donc

**Fonction exponentielle complexe :**

Définition : (exponentielle complexe)

On appelle exponentielle complexe, notée , la fonction somme de la série entière , de rayon de convergence .

Remarque : tout pareil (c’est Eymeric qui a dit)

Définition : On définit les fonctions cos, sin, cosh, sinh complexes de la manière suivante :

,

**Fonctions d’une variable réelle développable en série entière**

**Définitions et exemples**

Soit un intervalle de .

Déf : Une fonction est dite développable en série entière (DSE) en 0 si  et une série entière de rayon de conv. , tel que :

Remarque : Si tq , alors n’est pas DSE en 0.

Définition : Soient et . On dit que est DSE en si la fonction est DSE en 0.

Dans ce cas, et une série de rayon de convergence tq ,

Ainsi, ,

Définition : Soit une fonction de classe et . On appelle série de Taylor de en la série entière :

Théorème : (Condition nécessaire de DSE)

Soit et . Si la fonction est DSE en , alors est sur un voisinage de . De plus, son développement en série entière est donné par sa série de Taylor.

Démonstration :

* Cas  :

Sq est DSE en 0, , une série entière de rayon de conv tq et . S est sur .

Or et coïncident sur , donc est sur cet intervalle et

* Cas  :

On pose est en 0, alors par composition,

**Opérations sur les fonctions développables en séries entières**

Propriété :

1. Soient et . On suppose que et sont DSE en , alors sont DSE en .

De plus, la somme des DSE de et g est le DSE de la somme et pareil pour le produit

1. Soit , . Si est DSE en , alors ses dérivées successives et ses primitives le sont aussi, et s’obtiennent en dérivant/intégrant terme à terme les DSE de en

**Développement en séries entières usuels**

(à savoir refaire)